Terceira Prova de Teoria Eletromagnética I, 30/11/2011

Nome: GABARITO

(1ª questão) Uma espira circular, com raio R, está no plano xy e centrada na origem. A espira conduz uma corrente estacionária I no sentido anti-horário.

(a) *(2,0 pontos)* Determine o vetor campo magnético em uma altura arbitrária z acima do centro do disco.

(b) *(1,0 ponto)* Determine o vetor momento de dipolo magnético da configuração.

(c) *(1,0 ponto)* Mostre que, para pontos distantes do circuito, o campo magnético exato calculado no item (a) se reduz ao campo de um dipolo magnético puro.

(2ª questão) Considere o potencial vetor $\vec{A}$ definido no calibre de Coulomb associado a uma densidade de corrente $\vec{J}$.

(a) *(2,0 pontos)* A partir da lei de Ampère, mostre que $\vec{A}$ satisfaz uma equação de Poisson. Escreva a solução dessa equação de Poisson.

(b) *(1,0 ponto)* A partir da Lei de Biot-Savart, obtenha $\vec{A}$ em termos da densidade de corrente $\vec{J}$.

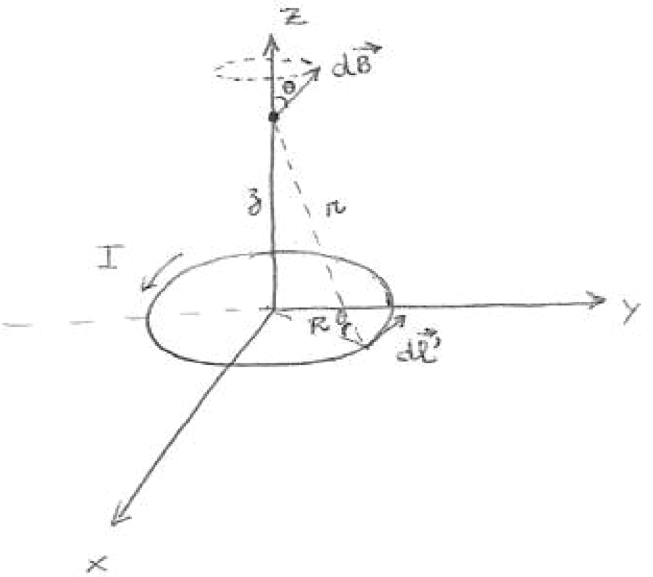
(3ª questão) Um solenoide infinito, com n voltas de fio por unidade de comprimento e corrente I, está preenchido por material magnético linear com suscetibilidade χ_m.

(a) *(1,5 pontos)* A partir da Lei de Ampère para materiais magnetizados, calcule o campo magnético dentro do solenoide. O campo magnético aumenta ou diminui em relação ao caso de um solenoide *não*-preenchido por material magnético?

(b) *(1,5 pontos)* Determine as densidades superficial e volumétrica de correntes de magnetização no material.

(1ª Questão)

(a)



Lei de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,d\vec{l}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Por simetria: $\vec{B} = B(z)\hat{z}$, com $B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{dl'\cos\theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R\,d\varphi}{r^2}\frac{R}{r}$

$$\Rightarrow B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\pi R^2}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}} \Rightarrow \boxed{\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{z}}$$

(b) $\vec{m} = \int I\,d\vec{a} = I\int \hat{z}\,da \Rightarrow \boxed{\vec{m} = I\pi R^2\hat{z}}$

(c) Pontos distantes: $z \gg R \Rightarrow \vec{B}(z) \simeq \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{z^3}\hat{z} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{z^3}\hat{z}$

Campo produzido por um dipolo magnético puro: $\vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\hat{r} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta})$

Fazendo $r = z$ e $\theta = 0$ (estamos sobre o eixo z):

$\vec{B}_{dip}(z) = \frac{\mu_0 m}{4\pi z^3}(2\hat{z}) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m}{z^3}\hat{z}$. Logo: $\boxed{\vec{B}_{dip}(z) \simeq \vec{B}(z) \text{ p/ } z \gg R}$

(2ª Questão)

(a) Lei de Ampère: $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \mu_0\vec{J}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(\cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J} \Rightarrow \boxed{\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}}$$

0 (calibre de Coulomb)

(Logo, $\vec{A}$ satisfaz uma equação de Poisson).

Solução da Eq. de Poisson: $\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\tau'}$

(b) Lei de Biot-Savart: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,d\tau'$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{J}(\vec{r}\,')\times\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)d\tau'$$

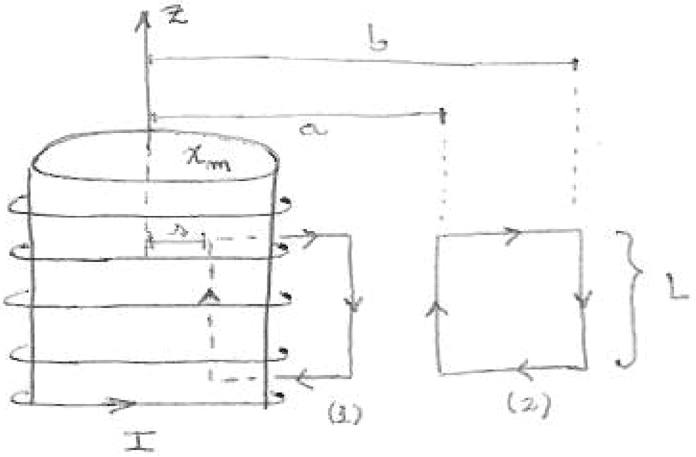
Mas $\vec{\nabla}\times(c\vec{F}) = c\,\vec{\nabla}\times\vec{F} - \vec{F}\times\vec{\nabla}c \Rightarrow -\vec{F}\times\vec{\nabla}c = \vec{\nabla}\times(c\vec{F}) - c\,\vec{\nabla}\times\vec{F}$

Assim: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left[\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\underbrace{\cancel{\vec{\nabla}\times\vec{J}(\vec{r}\,')}}_{0}\right]d\tau'$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\tau' = \vec{\nabla}\times\underbrace{\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\tau'\right]}_{\equiv\,\vec{A}(\vec{r})}$$

Assim: $\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\tau'}$

(3ª Questão)



a) Solenóide infinito: Por simetria teremos $\vec{H} = H(s)\hat{z}$, com $H \to 0$ p/ $s \to \infty$.

Lei de Ampère p/ $\vec{H}$:

- $\oint_{(2)} \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{LIVRE}^{(ENC)} \Rightarrow H(a)L - H(b)L = 0$

$\Rightarrow H(a) = H(b)$. Mas $H \to 0$ p/ $s \to \infty$.

Logo $\boxed{\vec{H} = \vec{0} \text{ (fora do solenóide)}}$

- $\oint_{(1)} \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{LIVRE}^{(ENC)} \Rightarrow H(s)L = nLI$

$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = nI\hat{z} \text{ (dentro do solenóide)}}$

Mas $\vec{B} = \mu\vec{H} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)nI\hat{z}}$ → $\vec{B}$ aumenta p/ materiais paramagnéticos e diminui p/ materiais diamagnéticos.

b) $\vec{M} = \chi_m\vec{H} = \chi_m n I \hat{z}$

$\vec{J}_M = \vec{\nabla}\times\vec{M} = \vec{\nabla}\times(\underbrace{\chi_m n I}_{\text{CONSTANTE}}) \Rightarrow \boxed{\vec{J}_M = \vec{0}}$ (Densidade volumétrica de corrente de magnetização é nula)

$\vec{K}_M = \vec{M}\times\hat{n} = \chi_m n I\,\hat{z}\times\hat{s} \Rightarrow \boxed{\vec{K}_M = \chi_m n I\hat{\varphi}}$ (Densidade superficial de corrente de magnetização).